Субъективная математика и дилемма Геделя

В.В.Целищев. Новосибирский государственный университет.

leitval@gmail.com

Понимание Гёделем природы рациональности человеческого мышления связано с вопросами разделения математики на субъективную и объективную, незавершаемости математики и природы истинности гёделева предложения.

Гедель полагал разделение математики на объективную и субъективную в качестве эпистемологической интерпретации своих теорем о неполноте арифметики. Под субъективной математикой понимается система всех доказуемых математических утверждений, в то время как под объективной математикой понимается система всех истинных математических утверждений. Субъективная математика тесно связана с феноменом понимания математического доказательства человеческим умом [1].

Поскольку незавершаемость математики, по Геделю, обязана процессу добавления всякий раз конструируемого в формальной системе гёделева предложения в качестве аксиомы, аргументы в пользу истинности такого предложения являются важными. Присоединение сконструированного в системе гёделева предложения в этой системе является способом размышления системы о самой себе или же способом саморефлексии, формализуемой в виде принципов рефлексии, которые, имея одинаковую форму, обладают различной силой [2].

Дилемма Геделя, предложенная им в 1951 г., состоит в утверждении, что либо математика незавершаема в этом смысле, а её очевидные аксиомы никогда не могут быть проявлением конечного правила, т.е., человеческий ум (даже в пределах чистой математики) бесконечно превосходит возможности любой конечной машины, или же существуют абсолютно неразрешимые математические утверждения [3].

Разрешение дилеммы разделяет два направления в трактовке соотношения человеческого ума и машины. Менталисты, в отличие от механицистов, предполагают превосходство человеческого ума над машиной, и как оказалось, сам Гёдель являлся менталистом. Правда, он допускал и такую интерпретацию им «установленного математического факта», когда оба члена дизъюнкции истинны, и значит, человеческий ум бесконечно превосходит конечную машину, и не существует абсолютно неразрешимых математических проблем. Хотя Гёдель считал свой вывод «математическим результатом», по мнению видного логика Дж.Булоса, выводы Гёделя никак не следуют из теорем о неполноте уже по той самой причине, что в этих выводах используются весьма неясные понятия типа «человеческий ум эквивалентен конечной машине» [4]. Предпочтение в разрешении дилеммы Геделем указанным образом характеризуется как «рационалистический оптимизм», обусловленный его объективизмом платонистского толка.

К числу интуитивно постигаемых или самоочевидных истин часто относят само «гёделево предложение». Поскольку конструкция Гёделя относится к метаматематике, возникает вопрос, можно ли вообще отличить самоочевидные истины элементарной математики от той части математики, в которой можно сконструировать гёделево предложение. Один из подходов к решению этой проблемы является понимание того, каким является гёделево предложение — аналитической или синтетической истиной, при всей многозначности этих терминов.

Д.Айзексен полагает, что истины элементарной арифметики представляют собой внутреннюю, концептуально вполне определённую область арифметической истины. Истины вроде гёделева предложения, лежащие за пределами этой области, таковы, что нет способа, которым эти истины могут восприниматься в чисто арифметических терминах» [5].

Поскольку гёделево предложение для непротиворечивой формальной системы не выводимо в ней, оно не является аналитическим. Если формальная система может быть расширена таким образом, чтобы гёделево предложение было доказуемо, имеются принципиальные резоны для того, чтобы полагать синтетическим любое гёделево предложение, которое недоказуемо в данной системе [6].

Нерешенным остается вопрос, обязан ли синтетический характер геделева предложения предикату истины, или же принципам рефлексии. Очевидно, что ответ на этот вопрос лежит в понимании природы «самоочевидности» арифметических утверждений и принятии соответствующих принципов рефлексии.

Следует отметить лишь, что сам Гёдель понимал важность этого вопроса, оставив в своих неопубликованных при жизни материалах важные и интересные предложения [7].

1. Salmon N. *The Limits of Human Mathematics* // Philosophical Papers. Vol. 1. Metaphysics, Mathematics, and Meaning. Oxford, Clarendon Press, 2005.

2. Feferman S. Transfinite Recursive Progressions of Axiomatic Theories // *Journal of Symbolic Logic*. 1962. Vol. 27. P. 259–316.

3. Гёдель К. *Некоторые основные теоремы в основаниях математики и их следствия* // Гёдель К. Статьи. В Хинтикка Я. О Гёделе. М. Канон+, 2014.

4. Boolos G. *Introductory Note to *1951** // Goedel K. Collected Works. Vol. III: Un-published Essays and Lectures / Eds. Feferman et al. Oxford University Press, 1995. P. 290–304.

5. Isaacson D. *Arithmetical Truth and Hidden High-Order Concepts* // The Philosophy of Mathematics / Ed. Hart W.D. Oxford University Press, 1998. P. 203–224.

6. Shapiro S. Induction and Indefinite Extensibility: the Goedel’s Sentence is True, but does Someone Change the Subject // *Mind*. Vol. 107. № 427. P. 597–624.

7. Dawson J., Dawson Ch. *Future Tasks for the Goedel’s Scholars* // Kurt Goedel. Essays for His Centennial / Eds. S.Feferman et al. Cambridge University Press, 2010. P. 21–44.